Varianta 080

SUBIECTUL I

a) $2\sqrt{2}$. b) $x^2+y^2=8$. c) $\cos\left(O\hat{A}B\right)=\frac{AB}{OA}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) Relația $4^2+4^2-4\cdot 4-4\cdot 4=0$ este adevărată.e) 1. f) $-\frac{7}{25}$.

SUBIECTUL II

1.

a) $\frac{3}{4}*\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$. b) $e=\frac{3}{2}$ este element neutru. c) deci simetricul lui 4 este $\frac{13}{2}$.

d) Ecuația se scrie: $2\left(2^x-1\right)\left(4^x-1\right)=0 \Leftrightarrow x\in\{0\}$.

e) Avem că $\frac{5}{2}\in \mathbf{Q}\setminus\mathbf{Z}, \frac{7}{3}\in \mathbf{Q}\setminus\mathbf{Z}$, dar $\frac{5}{2}*\frac{7}{3}\notin \mathbf{Q}\setminus\mathbf{Z}$.

2.

a) $f(-1)=3$. b) $a=\frac{1}{2}$.

c) Avem $f(x)=\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}, \forall x\in \mathbf{R}.$ d) $f'(x)=4x^3+4x+1, x\in \mathbf{R}$.

e) $\frac{41}{30}$.

SUBIECTUL III

a) $\det(A)=0$, $\operatorname{rang}(A)=1$. b) $A^2=A, B^2=B, AB=O_2=BA$.

c) $C(x), C(y)\in M \Rightarrow C(x)\cdot C(y)=(xA+B)(yA+B) \ =xyA+B=C(xy)\in M$, căci $xy\in \mathbf{R}^*$, iar $M\subset M_2(\mathbf{C})$.

d) $C(x)\cdot C(y)=C(x\cdot y)=C(y\cdot x)=C(y)\cdot C(x), \forall C(x), C(y)\in M$.

e) $C(x)\in M\Rightarrow C(x)=\begin{pmatrix}-x+2 & -2x+2\\ x-1 & 2x-1\end{pmatrix}$, de unde $\det C(x)=x\neq 0$.

Avem $C(2)=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, de unde $\left(C(2)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$.

f) $A\cdot X=B$ nu are soluții în $M_2(\mathbf{C})$. g) Pentru $n=1$ egalitatea este adevărată.

Presupunem că are loc egalitatea $C^k(x)=C\left(x^k\right), k\in \mathbf{N}^*$.

Atunci $C^{k+1}(x)=C^k(x)\cdot C(x)=C\left(x^k\right)\cdot C(x)=C\left(x^k\cdot x\right)=C\left(x^{k+1}\right)$, adică egalitatea este adevărată şi pentru $n=k+1$. Astfel $C^n(x)=C(x^n),\ n\in\mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV

a) $f_n'(x)=((n+1)x+1)\cdot(1+x)^{n-1}, x\in\mathbf{R}$. b) 0.

c) $x=-1$ este punct de maxim local, iar $x=-\frac{1}{3}$ este punct de minim local.

d) Avem

$$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\left(f_{n+1}(x)-f_n(x)\right)dx=\int_0^1 x^2(1+x)^n\,dx\ge 0,$$

deoarece $x^2(1+x)^n\ge 0, \forall x\in[0,1]$, deci şirul $(I_n)_{n\ge 1}$ este crescător.

e) $\int_0^1(1+x)^n\,dx=\left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$

f) Utilizând binomul lui Newton, avem

$f_n(x)=x\cdot\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^{k+1}, \forall n\in\mathbf{N}^*, x\in\mathbf{R}$, adică are loc concluzia.

g) Integrând egalitatea de la f) avem

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^{k+1}\right)dx=\left.\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{x^{k+2}}{k+2}\right)\right|_0^1=\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+2}.$$

Pe de altă parte

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^1\left((1+x)^{n+1}-(1+x)^n\right)dx=\left.\left(\frac{(1+x)^{n+2}}{n+2}-\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right)\right|_0^1=\frac{n\cdot 2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}.$$

Aşadar obținem egalitatea dorită.